doi: 10.3969/j.issn.1674-232X.2017.04.003

脉冲扰动下微分系统的弱指数渐近稳定性

曲本鑫,奚雷雷,申建华
(杭州师范大学理学院,浙江 杭州 310036)

摘　要:对于脉冲微分系统的弱指数渐近稳定性给出了一个新的、更广泛的判定定理,突出了脉冲效应对系统稳定性的关键影响,并给出例子进一步说明了所得结果.

关键词:混合动力系统;李雅普诺夫函数;弱指数渐近稳定性;脉冲微分系统
中图分类号:O19;O175　　**MSC2010**:34D20;93D20　　**文献标志码**:A
文章编号:1674-232X(2017)04-0353-07

1　引言和预备知识

脉冲现象作为一种瞬时突变现象,在现代科技各领域的实际问题中是普遍存在的,其数学模型往往可归结为脉冲微分系统. 近 30 年来,脉冲微分方程理论的研究受到较广泛的关注,已经形成较完整的体系并得到了深入的发展. 关于脉冲微分系统的定性理论(稳定性、周期性、有界性、振动性等)受到普遍重视,是脉冲微分方程理论中一个很重要的课题.

文[1]提出弱指数稳定的概念,推广了指数渐近稳定的概念,可用于更好地刻划解趋于零的速度. 对于脉冲微分方程的稳定性问题,已有不少研究[2-4],但对脉冲微分方程的弱指数渐近稳定性的研究不多. 本文在文[5]关于脉冲微分系统弱指数渐近稳定性的判定定理上进一步推广,使得定理适应的范围更大.

$\mathbf{R}$ 表示实数集,$\mathbf{R}_+=[0,\infty)$,$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间. $\mathbf{N}_+$ 是正整数集合.

设集合 U 到集合 W 的映射 f,即 $f:U\to W$,进一步用 $\{U\to W\}$ 表示集合 U 到集合 W 的所有映射的集合. $C[U,W]$ 代表从 U 到 W 的所有连续函数的集合,$C^k[U,W]$ 代表从 U 到 W 的具有 k 阶连续导数的所有函数的集合. 一个函数 $\lambda\in C([0,h],\mathbf{R}_+)$(或者 $\lambda\in C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$)属于 K 类函数,如果 $\lambda(0)=0$ 且 λ 在区间 $[0,h]$(或者 $\mathbf{R}_+$)上是严格递增函数.

设 (X,d) 是一个度量空间,其中 X 代表一个非空集合,d 表示度量.

定义 1[6]　设 $A\subset X$,$T\subset\mathbf{R}_+$,对任意固定的 $a\in A$,$t_0\in T$,称映射 p 为运动,若满足 $p(\cdot,a,t_0):T_{a,t_0}\to X$,$p(t_0,a,t_0)=a$,其中 $T_{a,t_0}=[t_0,t_1)\cap T$,$t_1>t_0$,$t_1$ 是有限数或无穷大.

定义 2[6]　设 S 是一族运动,即 $S\subset\{p(\cdot,a,t_0)\in\Lambda:p(t_0,a,t_0)=a\}$,其中 $\Lambda=\bigcup(a,t_0)\in A\times T\{T_{a,t_0}\times\{a\}\times\{t_0\}\to X\}$,并且 $T_{a,t_0}\times\{a\}\times\{t_0\}\to X$ 代表一个从 $T_{a,t_0}\times\{a\}\times\{t_0\}$ 到 X 的映射,于是

收稿日期:2016-06-22
基金项目:国家自然科学基金项目(11571088);浙江省自然科学基金项目(LY14A010024).
通信作者:申建华(1961—),男,教授,博士,主要从事常微分方程与动力系统研究. E-mail:jianhuashen2013@163.com

称 $\{T,X,A,S\}$ 为一个动力系统.

定义 3[7] 设 $\{T,X,A,S\}$ 是一个动力系统,则称集合 $M\subset A$ 是对应于系统 S 的不变集合,如果 $a\in M$,对所有 $t\in T_{a,t_0}$,$t_0\in T$ 和 $p(\cdot,a,t_0)\in S$ 使得 $p(t,a,t_0)\in M$. 特别地,当 $M=\{x_0\}$,其中 $x_0\in A$,则称 x_0 为平衡点.

定义 4[7] 设 $\{T,X,A,S\}$ 是一个动力系统,$M\subset A$ 是 S 的一个不变集合. 假设 $\lambda(s)\in K$,$\alpha>0$ 是一个常数. 对任意 $\varepsilon>0$,$t_0\in T$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$,对所有的 $t\in T_{a,t_0}$,$p(\cdot,a,t_0)\in S$,当 $d(a,M)<\delta$ 时,有 $d(p(t,a,t_0),M)\leqslant\varepsilon$,则称 (S,M) 是稳定的;进一步地,如果 (S,M) 是稳定的且对任意 $t_0\in T$,存在 $\xi=\xi(t_0)>0$,对所有的 $p(\cdot,a,t_0)\in S$,当 $d(a,M)<\xi$ 时,有 $\lambda(d(p(t,a,t_0),M))\leqslant\varepsilon e^{-\alpha(t-t_0)}$,则称 (S,M) 是弱指数渐近稳定的. 有时为了强调 $\lambda(s)$ 的作用,也称为 λ 型弱指数渐近稳定,α 称为指数,$\lambda(s)$ 称为型或指数 α 的吸引阶.

下面考察有限维的脉冲动力系统. 设 $X=\mathbf{R}^n$,d 为由欧氏向量范数 $|\cdot|$ 决定的度量,$|x|=(x^{\mathrm{T}}x)^{\frac{1}{2}}$,$x\in\mathbf{R}^n$. 对于 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$,设 $\|A\|=[\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)]^{\frac{1}{2}}$.

考察下列形式的脉冲微分系统

$$\begin{cases}x'(t)=f(t,x),t\geqslant 0,t\neq\theta_i,i\in\mathbf{N}_+,\\ \Delta x=J_i(x),t=\theta_i,i\in\mathbf{N}_+,\end{cases}\tag{1}$$

其中,$x\in X=\mathbf{R}^n$ 代表状态且 $f\in C[\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n]$ 对 x 满足利普希茨条件以保证系统(1)在满足给定的初值条件时解的存在性和唯一性. 集合 $E=\{\theta_1,\theta_2,\cdots:\theta_1<\theta_2<\cdots\}\subset\mathbf{R}_+$ 是 $\mathbf{R}_+$ 一个无界、闭的离散子集,它代表了跳跃发生的时刻的集合,$J_i:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 代表时刻 θ_i 时状态的改变. 需要指出的是,一般情况下集合 E 依赖于一个确定的运动,对于不同的运动相关的集合 E 一般是不同的. 函数 $\varphi:[\theta_0,\infty)\to\mathbf{R}^n$ 是系统(1)的解如果满足:1)对某个 $\theta_0\geqslant 0$,$\varphi(t)$ 在 $[\theta_0,\infty)$ 是左连续的;2) $\varphi(t)$ 在 $[\theta_0,\infty)$ 与 E 的补集上是可微的并且导数为 $f(\varphi(t),t)$;3)对任意 $t=\theta_i\in E$,$\varphi(t^+)=\lim_{s\to t,s>t}\varphi(s)=\varphi(t)+J_i(\varphi(t))$. 通篇文章将使用这个记号.

如果对系统(1),假设 $f(t,0)=0$,$t\in\mathbf{R}_+$ 且 $J_i(0)=0$,$i\in\mathbf{N}_+$,则 $x=0$ 是一个平衡点.

定义 5[5] 设 $V:\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}_+$,称 V 属于 V_0 类的,若 $V(t,x)$ 满足

1) V 在 $(\theta_i,\theta_{i+1}]\times\mathbf{R}^n$ 上连续,且对任意 $x,y\in\mathbf{R}^n$,有 $\lim_{(t,y)\to(\theta_i^+,x)}V(t,y)=V(\theta_i^+,x)$ 存在,其中,$t\in(\theta_i,\theta_{i+1}]$,$i\in\mathbf{N}_+$.

2) V 关于 x 满足局部利普希茨条件.

定义 6[5] 设函数 $V\in V_0$,则 V 沿着系统(1)的解 $x(t)$ 的右上导数记作

$$D^+V(t,x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}[V(t+h,x+hf(t,x)-V(t,x)],$$

其中,$(t,x)\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^n$. 对 $t=\theta_i$,$i\in\mathbf{N}_+$,$V(t,x)$ 被看作为 $V(\theta_i^+,x)$,$f(t,x)$ 看作是 $f(\theta_i^+,x)$.

命题 1[5] 设存在 K 类函数 $u(s)$,$w(s)$ 及 V_0 类函数 $V(t,x)$ 使

1) $u(|x|)\leqslant V(t,x)\leqslant w(|x|)$.

2) $D^+V(t,x(t))\leqslant cV^m(t,x(t))$,$t\neq\theta_i$,$i\in\mathbf{N}_+$,这里 $c>0$,$m\geqslant 1$.

3)当 $m=1$ 时,存在 $H_1>0$,使当 $|x|\leqslant H_1$ 时,有 $V(\theta_i^+,x+J_i(x))\leqslant e^{-d_i}V(\theta_i,x)$;当 $m>1$ 时,存在 $H_2>0$,使当 $|x|\leqslant H_2$ 时,有 $V^{1-m}(\theta_i^+,x+J_i(x))\geqslant V^{1-m}(\theta_i,x)+d_i$,这里 $d_i>0$,$i\in\mathbf{N}_+$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\inf\dfrac{d_{n-1}}{\theta_n-\theta_{n-1}}=\beta>c$.

则当 $m=1$ 时,系统(1)的零解为 u 型弱指数渐近稳定的;当 $m>1$ 时,系统(1)的零解为 λ 型弱指数渐近稳定的,这里 $\lambda(s)=\exp[-u^{1-m}(s)]$.

命题 1 给出了系统(1)的平衡点 $x=0$ 的弱指数渐近稳定的一个充分条件.

2　主要结果

定理 1　设存在 K 类函数 $u(s)$, $w(s)$ 及 V_0 类函数 $V(t,x)$ 以及常数 $m \in \mathbf{R}$, $0<\rho<\gamma$ 使

1) $u(|x|) \leqslant V(t,x) \leqslant w(|x|)$.

2)当 $m \geqslant 1$ 时, $D^+V(t,x(t)) \leqslant c(t)V^m(t,x(t))$;当 $m<1$ 时, $D^+V(t,x(t)) \leqslant c(t)V^{m-2}(t,x(t))$,这里 $c(t) \leqslant \rho$, $t \neq \theta_i$, $i \in \mathbf{N}_+$.

3)当 $m=1$ 时,存在 $H_1>0$,使当 $|x| \leqslant H_1$ 时,有 $V(\theta_i^+, x+J_i(x)) \leqslant \mathrm{e}^{-d_i}V(\theta_i,x)$;当 $m>1$ 时,存在 $H_2>0$,使当 $|x| \leqslant H_2$ 时,有 $V^{1-m}(\theta_i^+, x+J_i(x)) \geqslant V^{1-m}(\theta_i,x)+d_i$;当 $m<1$ 时,存在 $H_3>0$,使当 $|x| \leqslant H_3$ 时,有 $V^{m-1}(\theta_i^+, x+J_i(x)) \geqslant V^{m-1}(\theta_i,x)+d_i$,这里 $d_i>\gamma(\theta_{i+1}-\theta_i)$, $i \in \mathbf{N}_+$.

则当 $m=1$ 时,(1)的零解为 u 型弱指数渐近稳定的;当 $m>1$ 时,(1)的零解为 λ 型弱指数渐近稳定的,这里 $\lambda(s)=\exp[-u^{1-m}(s)]$;当 $m<1$ 时,(1)的零解为 λ 型弱指数渐近稳定的,这里 $\lambda(s)=\exp[-u^{m-1}(s)]$.

证明　Ⅰ　考虑 $m=1$ 的情形.

取 $\gamma_1>0$,使 $\gamma>\gamma_1>\rho$,由条件 3)知存在正整数 N ,当 $n>N$ 时,有

$$\exp[-(d_N+d_{N+1}+\cdots+d_{n-1})]<\exp[-\gamma_1(\theta_n-\theta_N)]. \tag{2}$$

注意到 $w(s)$ 为 K 类函数,故对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$ ($\delta<H_1$),使当 $|x_0|<\delta$ 时,

$$\begin{cases} w(|x_0|)\exp[\gamma_1(\theta_1-\theta_0)]<M_1, \\ w(|x_0|)\exp[\gamma_1(\theta_2-\theta_0)-d_1]<M_1, \\ w(|x_0|)\exp[\gamma_1(\theta_N-\theta_0)-(d_1+d_2+\cdots+d_{N+1})]<M_1, \end{cases} \tag{3}$$

这里 $M_1=\min\{u(H_1),\varepsilon\}$.

记 $\alpha_1=\gamma_1-\rho$,则 $\alpha_1>0$. 当 $t \in [\theta_0,\theta_1]$ 时,由条件 1),2)知

$$V(t,x(t)) \leqslant V(\theta_0,x_0)\exp[\int_{\theta_0}^t c(s)\mathrm{d}s] \leqslant V(\theta_0,x_0)\exp[\rho(t-\theta_0)] \leqslant w(|x_0|)\exp[\rho(t-\theta_0)], \tag{4}$$

由条件 1),式(3)及(4)知

$$u(|x(t)|) \leqslant V(t,x(t)) \leqslant w(|x_0|)\exp[\rho(t-\theta_0)] \leqslant w(|x_0|)\exp[\rho(\theta_1-\theta_0)] \leqslant M_1 \leqslant u(H_1), \tag{5}$$

即当 $t \in [\theta_0,\theta_1]$ 时, $|x(t)| \leqslant H_1$,特别地 $|x(\theta_1)| \leqslant H_1$.

当 $t \in (\theta_1,\theta_2]$,由条件 2),3),式(4)及(5)得

$$\begin{aligned} V(t,x(t)) &\leqslant V(\theta_1^+,x(\theta_1^+))\exp[\int_{\theta_1}^t c(s)\mathrm{d}s] \leqslant \exp(-d_1)V(\theta_1,x(\theta_1))\exp[\int_{\theta_1}^t c(s)\mathrm{d}s] \leqslant \\ &\exp(-d_1)w(|x_0|)\exp[\rho(\theta_1-\theta_0)]\exp[\rho(t-\theta_1)] = w(|x_0|)\exp[\rho(t-\theta_0)-d_1], \end{aligned} \tag{6}$$

由条件 1),式(3)和(6)知

$$u(|x(t)|) \leqslant V(t,x(t)) \leqslant w(|x_0|)\exp[\rho(t-\theta_0)-d_1] \leqslant w(|x_0|)\exp[\rho(\theta_2-\theta_0)-d_1] \leqslant M_1 \leqslant u(H_1), \tag{7}$$

即当 $t \in (\theta_1,\theta_2]$ 时, $|x(t)| \leqslant H_1$,特别地 $|x(\theta_2)| \leqslant H_1$.

类似可证,当 $t \in (\theta_{n-1},\theta_n]$, $n=2,3,\cdots,N$ 时,有

$$V(t,x(t)) \leqslant w(|x_0|)\exp[\rho(t-\theta_0)-(d_1+d_2+\cdots+d_{n-1})], \tag{8}$$

且当 $t \in (\theta_{n-1},\theta_n]$ 时, $|x(t)| \leqslant H_1$,特别地 $|x(\theta_N)| \leqslant H_1$.

当 $t \in (\theta_N,\theta_{N+1}]$,由条件 2),3)和式(8)得

$$\begin{aligned} V(t,x(t)) &\leqslant V(\theta_N^+,x(\theta_N^+))\exp[\int_{\theta_N}^t c(s)\mathrm{d}s] \leqslant \exp(-d_N)V(\theta_N,x(\theta_N))\exp[\int_{\theta_N}^t c(s)\mathrm{d}s] \leqslant \\ &\exp(-d_N)w(|x_0|)\exp[\rho(\theta_N-\theta_0)-(d_1+d_2+\cdots+d_{N+1})]\exp[\rho(t-\theta_N)] = \\ &w(|x_0|)\exp[\rho(t-\theta_0)-(d_1+d_2+\cdots+d_N)], \end{aligned} \tag{9}$$

由式(2),(3)和(9)得

$$\begin{aligned} u(|x(t)|) &\leqslant V(t,x(t)) \leqslant w(|x_0|)\exp[\rho(\theta_N-\theta_0)-(d_1+\cdots+d_{N-1})]\exp[\rho(t-\theta_N)]\exp(-d_N) \leqslant \\ &M_1\exp[\rho(\theta_{N+1}-\theta_N)]\exp[-\gamma_1(\theta_{N+1}-\theta_N)] \leqslant M_1\exp[-\alpha_1(\theta_{N+1}-\theta_N)] \leqslant M_1 \leqslant u(H_1), \end{aligned} \tag{10}$$

即当 $t\in(\theta_N,\theta_{N+1}]$ 时，$|x(t)|\leqslant H_1$，特别地 $|x(\theta_{N+1})|\leqslant H_1$.

用归纳法可证得:对自然数 $n=N+1,N+2,\cdots$，当 $t\in(\theta_{n-1},\theta_n]$ 时,有

$$V(t,x(t))\leqslant w(|x_0|)\exp[\rho(t-\theta_0)-(d_1+d_2+\cdots+d_{n-1})],\tag{11}$$

且当 $t\in(\theta_{n-1},\theta_n]$ 时，$|x(t)|\leqslant H_1$.

当 $t\in[\theta_0,\theta_1]$ 时,由条件 1),式(3)和(4)得

$$u(|x(t)|)\leqslant w(|x_0|)\exp[\rho(t-\theta_0)]\leqslant\varepsilon\exp[\rho(t-\theta_0)-\gamma_1(\theta_1-\theta_0)]\leqslant\varepsilon\exp[-\alpha_1(t-\theta_0)].\tag{12}$$

当 $t\in(\theta_1,\theta_2]$ 时,由条件 1),式(3)和(6)得

$$u(|x(t)|)\leqslant w(|x_0|)\exp[\rho(t-\theta_0)-d_1]\leqslant\varepsilon\exp[\rho(t-\theta_0)-\gamma_1(\theta_2-\theta_0)]\leqslant\varepsilon\exp[-\alpha_1(t-\theta_0)].\tag{13}$$

类似地可证,当 $t\in(\theta_{n-1},\theta_n]$，$n=2,3,\cdots,N$ 时,

$$u(|x(t)|)\leqslant\varepsilon\exp[-\alpha_1(t-\theta_0)].\tag{14}$$

当 $t\in(\theta_{n-1},\theta_n]$，$n=N+1,N+2,\cdots$ 时,由条件 1),式(2),(3)和(11)得

$$\begin{aligned}u(|x(t)|)&\leqslant w(|x_0|)\exp[-(d_1+\cdots+d_{N+1})]\exp[\rho(t-\theta_0)-(d_N+\cdots+d_{n-1})]\leqslant\\&\varepsilon\exp[-\gamma_1(\theta_N-\theta_0)]\exp[\rho(t-\theta_0)-\gamma_1(\theta_n-\theta_N)]\leqslant\varepsilon\exp[-\alpha_1(t-\theta_0)].\end{aligned}\tag{15}$$

综合式(12),(14)和(15)易见:对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$（$\delta<H_1$），当 $|x_0|<\delta$ 时,对任意 $t\in[\theta_0,\infty)$，有 $u(|x(t)|)\leqslant\varepsilon\exp[-\alpha_1(t-\theta_0)]$. 故当 $m=1$ 时,(1)的零解是 u 型弱指数渐近稳定的.

Ⅱ 考虑 $m>1$ 的情形.

取 $\gamma_2>0$，使 $\dfrac{\gamma}{m-1}>\gamma_2>\rho$，由条件 3)知存在正整数 N，当 $n>N$ 时,有

$$d_N+d_{N+1}+\cdots+d_{n-1}>-(1-m)\gamma_2(\theta_n-\theta_N).\tag{16}$$

注意到 $w(s)$ 为 K 类函数,故对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$（$\delta<H_2$），使当 $|x_0|<\delta$ 时,

$$\begin{cases}w^{1-m}(|x_0|)+(1-m)\gamma_2(\theta_1-\theta_0)>M_2,\\w^{1-m}(|x_0|)+(1-m)\gamma_2(\theta_2-\theta_0)+d_1>M_2,\\w^{1-m}(|x_0|)+(1-m)\gamma_2(\theta_N-\theta_0)+d_1+d_2+\cdots+d_{N+1}>M_2,\end{cases}\tag{17}$$

这里 $M_2=\max\{u^{1-m}(H_2),-\ln\varepsilon\}$.

记 $\alpha_2=(m-1)(\gamma_2-\rho)$，则 $\alpha_2>0$ 且 $(1-m)\rho=\alpha_2+(1-m)\gamma_2$.

当 $t\in[\theta_0,\theta_1]$ 时,由条件 1),2)知

$$V^{1-m}(t,x(t))\geqslant V^{1-m}(\theta_0,x_0)+(1-m)\int_{\theta_0}^{t}c(s)\mathrm{d}s\geqslant w^{1-m}(|x_0|)+(1-m)\rho(t-\theta_0).\tag{18}$$

由条件 1),式(17)及(18)知

$$u^{1-m}(|x(t)|)\geqslant w^{1-m}(|x_0|)+(1-m)\rho(t-\theta_0)\geqslant w^{1-m}(|x_0|)+(1-m)\gamma_2(\theta_1-\theta_0)\geqslant M_2\geqslant u^{1-m}(H_2),\tag{19}$$

即当 $t\in[\theta_0,\theta_1]$ 时，$|x(t)|\leqslant H_2$，特别地 $|x(\theta_1)|\leqslant H_2$.

当 $t\in(\theta_1,\theta_2]$，由条件 2),3)和式(18)得

$$\begin{aligned}V^{1-m}(t,x(t))&\geqslant V^{1-m}(\theta_1^+,x(\theta_1^+))+(1-m)\int_{\theta_1}^{t}c(s)\mathrm{d}s\geqslant\\&V^{1-m}(\theta_1,x(\theta_1))+d_1+(1-m)\rho(t-\theta_1)\geqslant w^{1-m}(|x_0|)+(1-m)\rho(t-\theta_0)+d_1.\end{aligned}\tag{20}$$

由条件 1),式(17)和(20)知,

$$u^{1-m}(|x(t)|)\geqslant V^{1-m}(t,x(t))\geqslant w^{1-m}(|x_0|)+(1-m)\gamma_2(\theta_2-\theta_0)+d_1\geqslant M_2\geqslant u^{1-m}(H_2),\tag{21}$$

即当 $t\in(\theta_1,\theta_2]$ 时，$|x(t)|\leqslant H_2$，特别地 $|x(\theta_2)|\leqslant H_2$.

类似可证,当 $t\in(\theta_{n-1},\theta_n]$，$n=2,3,\cdots,N$ 时,有

$$V^{1-m}(t,x(t))\geqslant w^{1-m}(|x_0|)+(1-m)\rho(t-\theta_0)+d_1+d_2+\cdots+d_{n-1},\tag{22}$$

且当 $t\in(\theta_{n-1},\theta_n]$ 时，$|x(t)|\leqslant H_2$，特别地 $|x(\theta_N)|\leqslant H_2$.

当 $t\in(\theta_N,\theta_{N+1}]$，由条件 2),3)和式(22)得

$$V^{1-m}(t,x(t)) \geqslant V^{1-m}(\theta_N^+,x(\theta_N^+)) + (1-m)\int_{\theta_N}^{t} c(s)\mathrm{d}s \geqslant V^{1-m}(\theta_N,x(\theta_N)) + d_N + (1-m)\rho(t-\theta_N) = w^{1-m}(|x_0|) + (1-m)\rho(t-\theta_0) + d_1 + d_2 + \cdots + d_N. \tag{23}$$

由条件 1),式(16),(17)和(23)得

$$u^{1-m}(|x(t)|) \geqslant V^{1-m}(t,x(t)) \geqslant w^{1-m}(|x_0|) + (1-m)\rho(t-\theta_0) + d_1 + d_2 + \cdots + d_N \geqslant w^{1-m}(|x_0|) + (1-m)\gamma_2(\theta_N-\theta_0) + d_1 + d_2 + \cdots + d_{N-1} \geqslant M_2 \geqslant u^{1-m}(H_2), \tag{24}$$

即当 $t \in (\theta_N,\theta_{N+1}]$ 时,$|x(t)| \leqslant H_2$,特别地 $|x(\theta_{N+1})| \leqslant H_2$.

用归纳法可证得:对自然数 $n = N+1, N+2, \cdots$,当 $t \in (\theta_{n-1},\theta_n]$ 时,有

$$V^{1-m}(t,x(t)) \geqslant w^{1-m}(|x_0|) + (1-m)\rho(t-\theta_0) + d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1}, \tag{25}$$

且当 $t \in (\theta_{n-1},\theta_n]$ 时,$|x(t)| \leqslant H_2$.

因此,由式(23)和(25)得,当 $t \in (\theta_{n-1},\theta_n]$,$n = 2,3,\cdots,N$ 时,有

$$V^{1-m}(t,x(t)) \geqslant w^{1-m}(|x_0|) + (1-m)\rho(t-\theta_0) + d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1}. \tag{26}$$

当 $t \in [\theta_0,\theta_1]$ 时,由条件 1),式(17)和(18)得

$$\lambda(|x(t)|) = \exp[-u^{1-m}(|x(t)|)] \leqslant \exp[-w^{1-m}(|x_0|) - (1-m)\rho(t-\theta_0)] \leqslant \exp[-w^{1-m}(|x_0|) - \alpha_2(t-\theta_0) - (1-m)\gamma_2(\theta_1-\theta_0)] \leqslant \exp[-M_2 - \alpha_2(t-\theta_0) \leqslant \varepsilon\exp[-\alpha_2(t-\theta_0)]. \tag{27}$$

类似地可证,当 $t \in (\theta_{n-1},\theta_n]$,$n = 2,3,\cdots,N$ 时,由条件 1),式(17)和(26)得

$$\lambda(|x(t)|) = \exp[-u^{1-m}(|x(t)|)] \leqslant \exp[-w^{1-m}(|x_0|) - (1-m)\rho(t-\theta_0) - (d_1+\cdots+d_{n-1})] \leqslant \exp[-w^{1-m}(|x_0|) - \alpha_2(t-\theta_0) - (1-m)\gamma_2(\theta_n-\theta_0) - (d_1+d_2+\cdots+d_{n-1})] \leqslant \exp[-M_2 - \alpha_2(t-\theta_0)] \leqslant \varepsilon\exp[-\alpha_2(t-\theta_0)]. \tag{28}$$

当 $t \in (\theta_{n-1},\theta_n]$,$n = N+1, N+2, \cdots$ 时,由条件 1),式(16),(17)和(26)得

$$\lambda(|x(t)|) = \exp[-u^{1-m}(|x(t)|)] \leqslant \exp[-V^{1-m}(t,x(t))] \leqslant \exp[-w^{1-m}(|x_0|) - (1-m)\rho(t-\theta_0) - (d_1+d_2+\cdots+d_{N-1}) - (d_N+\cdots+d_{n-1})] \leqslant \exp[-w^{1-m}(|x_0|) - (1-m)\gamma_2(\theta_N-\theta_0) - (d_1+\cdots+d_{N-1}) - \alpha_2(t-\theta_0)] \leqslant \exp[-M_2 - \alpha_2(t-\theta_0)] \leqslant \varepsilon\exp[-\alpha_2(t-\theta_0)]. \tag{29}$$

综合式(27),(28)和(29)易见:对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ($\delta < H_2$),当 $|x_0| < \delta$ 时,对任意 $t \in [\theta_0,\infty)$,有 $u(|x(t)|) \leqslant \varepsilon\exp[-\alpha_2(t-\theta_0)]$. 故当 $m > 1$ 时,(1)的零解是 λ 型弱指数渐近稳定的.

Ⅲ　考虑 $m < 1$ 的情形.

取 $\gamma_3 > 0$,使 $\dfrac{\gamma}{1-m} > \gamma_3 > \rho$,由条件 3)知存在正整数 N,当 $n > N$ 时,则

$$d_N + d_{N+1} + \cdots + d_{n-1} > -(m-1)\gamma_3(\theta_n-\theta_N). \tag{30}$$

注意到 $w(s)$ 为 K 类函数,故对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ($\delta < H_3$),使当 $|x_0| < \delta$ 时,

$$\begin{cases} w^{m-1}(|x_0|) + (m-1)\gamma_3(\theta_1-\theta_0) > M_3, \\ w^{m-1}(|x_0|) + (m-1)\gamma_3(\theta_2-\theta_0) + d_1 > M_3, \\ w^{m-1}(|x_0|) + (m-1)\gamma_3(\theta_N-\theta_0) + d_1 + d_2 + \cdots + d_{N-1} > M_3, \end{cases} \tag{31}$$

这里 $M_3 = \max\{u^{m-1}(H_3), -\ln\varepsilon\}$.

记 $\alpha_3 = (1-m)(\gamma_3-\rho)$,则 $\alpha_3 > 0$ 且 $(m-1)\rho = \alpha_3 + (m-1)\gamma_3$.

当 $t \in [\theta_0,\theta_1]$ 时,由条件 1),2)知

$$V^{m-1}(t,x(t)) \geqslant V^{m-1}(\theta_0,x_0) + (m-1)\int_{\theta_0}^{t} c(s)\mathrm{d}s \geqslant w^{m-1}(|x_0|) + (m-1)\rho(t-\theta_0), \tag{32}$$

由条件 1),式(31)及(32)知

$$u^{m-1}(|x(t)|) \geqslant w^{m-1}(|x_0|) + (m-1)\rho(t-\theta_0) \geqslant w^{m-1}(|x_0|) + (m-1)\gamma_3(\theta_1-\theta_0) \geqslant M_3 \geqslant u^{m-1}(H_3), \tag{33}$$

即当 $t\in[\theta_0,\theta_1]$ 时，$|x(t)|\leqslant H_3$，特别地 $|x(\theta_1)|\leqslant H_3$.

当 $t\in(\theta_1,\theta_2]$，由条件 2)，3)和式(32)得

$$\begin{aligned}V^{m-1}(t,x(t))\geqslant V^{m-1}(\theta_1^+,x(\theta_1^+))+(m-1)\int_{\theta_1}^{t}c(s)\mathrm{d}s\geqslant\\ w^{m-1}(|x_0|)+(m-1)\rho(\theta_1-\theta_0)+d_1+(m-1)\rho(t-\theta_1)=\\ w^{m-1}(|x_0|)+(m-1)\rho(t-\theta_0)+d_1,\end{aligned}\tag{34}$$

由条件 1)，式(31)和(34)知，

$$\begin{aligned}u^{m-1}(|x(t)|)\geqslant V^{m-1}(|x(t)|)\geqslant w^{m-1}(|x_0|)+(m-1)\rho(t-\theta_0)+d_1\geqslant\\ w^{m-1}(|x_0|)+(m-1)\gamma_3(\theta_2-\theta_0)+d_1\geqslant M_3\geqslant u^{m-1}(H_3),\end{aligned}\tag{35}$$

即当 $t\in(\theta_1,\theta_2]$ 时，$|x(t)|\leqslant H_3$，特别地 $|x(\theta_2)|\leqslant H_3$.

类似可证，当 $t\in(\theta_{n-1},\theta_n]$，$n=2,3,\cdots,N$ 时，有

$$V^{m-1}(t,x(t))\geqslant w^{m-1}(|x_0|)+(m-1)\rho(t-\theta_0)+d_1+d_2+\cdots+d_{n-1},\tag{36}$$

且当 $t\in(\theta_{n-1},\theta_n]$ 时，$|x(t)|\leqslant H_3$，特别地 $|x(\theta_N)|\leqslant H_3$.

当 $t\in(\theta_N,\theta_{N+1}]$，由条件 2)，3)和式(36)得

$$\begin{aligned}V^{m-1}(t,x(t))\geqslant V^{m-1}(\theta_N^+,x(\theta_N^+))+(m-1)\int_{\theta_N}^{t}c(s)\mathrm{d}s\geqslant V^{m-1}(\theta_N,x(\theta_N))+d_N+(m-1)\rho(t-\theta_N)=\\ w^{m-1}(|x_0|)+(m-1)\rho(t-\theta_0)+d_1+d_2+\cdots+d_N.\end{aligned}\tag{37}$$

由条件 1)，式(30)，(31)和(37)得

$$\begin{aligned}u^{m-1}(|x(t)|)\geqslant V^{m-1}(t,x(t))\geqslant w^{m-1}(|x_0|)+(m-1)\rho(t-\theta_0)+d_1+d_2+\cdots+d_N\geqslant\\ w^{m-1}(|x_0|)+(m-1)\gamma_3(\theta_{N+1}-\theta_0)+d_1+d_2+\cdots+d_N\geqslant\\ w^{m-1}(|x_0|)+(m-1)\gamma_3(\theta_N-\theta_0)+d_1+d_2+\cdots+d_{N-1}\geqslant M_3\geqslant u^{m-1}(H_3),\end{aligned}\tag{38}$$

即当 $t\in(\theta_N,\theta_{N+1}]$ 时，$|x(t)|\leqslant H_3$，特别地 $|x(\theta_{N+1})|\leqslant H_3$.

用归纳法可证得：对自然数 $n=N+1,N+2,\cdots$，当 $t\in(\theta_{n-1},\theta_n]$ 时，有

$$V^{m-1}(t,x(t))\geqslant w^{m-1}(|x_0|)+(m-1)\rho(t-\theta_0)+d_1+d_2+\cdots+d_{n-1},\tag{39}$$

且当 $t\in(\theta_{n-1},\theta_n]$ 时，$|x(t)|\leqslant H_3$.

因此，由式(36)，(39)得，当 $t\in(\theta_{n-1},\theta_n]$，$n=2,3,\cdots$ 时，有

$$V^{m-1}(t,x(t))\geqslant w^{m-1}(|x_0|)+(m-1)\rho(t-\theta_0)+d_1+d_2+\cdots+d_{n-1}.\tag{40}$$

当 $t\in[\theta_0,\theta_1]$ 时，由条件 1)，式(31)，(32)得

$$\begin{aligned}\lambda(|x(t)|)=\exp[-u^{m-1}(|x(t)|)]\leqslant\exp[-w^{m-1}(|x_0|)-(m-1)\rho(t-\theta_0)]\leqslant\\ \exp[-w^{m-1}(|x_0|)-\alpha_3(t-\theta_0)-(m-1)\gamma_3(\theta_1-\theta_0)]\leqslant\\ \exp[-M_3-\alpha_3(t-\theta_0)\leqslant\varepsilon\exp[-\alpha_3(t-\theta_0)].\end{aligned}\tag{41}$$

类似地可证，当 $t\in(\theta_{n-1},\theta_n]$，$n=2,3,\cdots,N$ 时，由条件 1)，式(31)和(40)得

$$\begin{aligned}\lambda(|x(t)|)=\exp[-u^{m-1}(|x(t)|)]\leqslant\exp[-w^{m-1}(|x_0|)-(m-1)\rho(t-\theta_0)-(d_1+\cdots+d_{n-1})]\leqslant\\ \exp[-w^{m-1}(|x_0|)-\alpha_3(t-\theta_0)-(m-1)\gamma_3(\theta_n-\theta_0)-(d_1+\cdots+d_{n-1})]\leqslant\\ \exp[-M_3-\alpha_3(t-\theta_0)]\leqslant\varepsilon\exp[-\alpha_3(t-\theta_0)].\end{aligned}\tag{42}$$

当 $t\in(\theta_{n-1},\theta_n]$，$n=N+1,N+2,\cdots$ 时，由条件 1)，式(30)，(31)和(40)得

$$\begin{aligned}\lambda(|x(t)|)=\exp[-u^{m-1}(|x(t)|)]\leqslant\exp[-V^{m-1}(t,x(t))]\leqslant\\ \exp[-w^{m-1}(|x_0|)-(m-1)\rho(t-\theta_0)-(d_1+d_2+\cdots+d_{N-1})-(d_N+\cdots+d_{n-1})]\leqslant\\ \exp[-w^{m-1}(|x_0|)-(m-1)\gamma_3(\theta_N-\theta_0)-(d_1+d_2+\cdots+d_{N-1})-\alpha_3(t-\theta_0)]\leqslant\\ \exp[-M_3-\alpha_3(t-\theta_0)]\leqslant\varepsilon\exp[-\alpha_3(t-\theta_0)].\end{aligned}\tag{43}$$

综合式(41)，(42)和(43)易见：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$（$\delta<H_3$），当 $|x_0|<\delta$ 时，对任意 $t\in[\theta_0,\infty)$，有 $u(|x(t)|)\leqslant\varepsilon\exp[-\alpha_3(t-\theta_0)]$. 故当 $m<1$ 时，(1)的零解是 λ 型弱指数渐近稳定的. 证毕.

注 1　容易看到，定理 1 条件 3)中的 $d_i > \gamma(\theta_{i+1} - \theta_i)$ 可以用下面更方便验证的条件来代替：

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{d_{n-1}}{\theta_n - \theta_{n-1}} > \rho .$$

3　举例应用

例题 1　考虑系统

$$\begin{cases} x' = c(t)x^{\frac{1}{2}}, t \neq i, \\ \Delta x = -\dfrac{8}{9}x, t = i, \end{cases} \tag{44}$$

这里 $0 < c(t) \leqslant 1$，$\theta_i = i$，$J_i(x) = -\dfrac{8}{9}x$，$i = 1,2,\cdots$.

取 $u(s) = w(s) = s$，$s \in [0,\infty)$，令 $V = |x|$. 因此，V 满足定理 1 中的条件 1).

当 $t \in [i-1,i)$ 时，

$$D^+ V = x' \mathrm{sign} x \leqslant c(t)\left|x^{\frac{1}{2}}\right| = c(t)V^{\frac{1}{2}}, \tag{45}$$

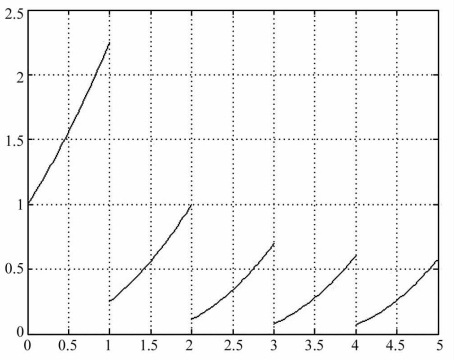

图 1　系统(44)的数值模拟

Fig. 1　Numerical simulation of system(44)

则式(45)满足定理 1 中的条件 2)，且 $m = \dfrac{1}{2}$. 取 $\rho = 1$，$\gamma = \dfrac{1}{2}$，$d_i = 2$，$i = 1,2,\cdots$，当 $|x| \leqslant 1$(即 $H = 1$)时，

$$V^{m-1}(\theta_i^+, x + J_i(x)) - V^{m-1}(\theta_i, x) = \left(\frac{9}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{x}} \geqslant 2 = d_i. \tag{46}$$

则式(46)满足定理 1 中的条件 3). 因此，系统(44)是 λ 型弱指数渐近稳定的.

取 $x(0) = 1$，$0 \leqslant t \leqslant 8$，$c(t) = 1$，脉冲点 $t = \{1,2,\cdots,8\}$. 则系统(44)的数值模拟如图 1 所示.

参考文献：

[1] 温立志，夏华兴. 泛函微分方程的弱指数渐近稳定性[J]. 中国科学 A 辑，1992，22(3)：235-242.

[2] SHEN J H. Razumikhin techniques in impulsive functional differential equations[J]. Non Anal, 1999, 36(1): 119-130.

[3] SHEN J H, LI J L. Impulsive control for stability of volterra functional differential equations[J]. Journal of Analysis and its Application, 2005, 24(4): 721-734.

[4] SHEN J H, LUO Z G, LIU X Z. Impulsive stabilization of functional differential equations via Liapunov functionals[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1999, 240(1): 1-15.

[5] 冯伟贞，陈永劭. 脉冲微分系统的弱指数渐近稳定性[J]. 高校应用数学学报 A 辑，2002，17(1)：1-6.

[6] LIU X Z, SHEN J H. Stability theory of hybrid dynamical systems with time delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(4): 620-625.

[7] SHEN J H, JING Z J. Stability analysis for systems with impulse effects[J]. International Journal of Theoretical Physics, 2006, 45(9): 1703-1717.

Weak Exponential Asymptotic Stability for Impulsive Differential Equations

QU Benxin, XI Leilei, SHEN Jianhua

(School of Science, Hangzhou Normal University, Hangzhou 310036, China)

Abstract: A new and broader decision theorem for the weak exponential asymptotic stability of differential equations with impulsive effects is established. And the notable effect of impulse upon the stability of a system is stressed. An example is also discussed to illustrate the results.

Key words: hybrid dynamical system; Lyapunov function; weak exponential asymptotic stability; impulsive differential system